
Test de Sélection BxMO 2026

Instructions. Ce test comporte **15 problèmes**. La réponse à chaque problème est un entier positif ou nul compris entre **000 et 999** inclus. Durée : **3 heures**. Aucune calculatrice, livre, note ou appareil électronique n'est autorisé. Chaque réponse correcte vaut 1 point ; aucune pénalité pour les réponses incorrectes ou les questions laissées sans réponse.

Problème 1. Si $x + \frac{1}{x} = 3$, calculer $x^6 + x^4 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$.

Problème 2. Combien de diviseurs positifs de $12!$ sont divisibles par 60 ?

Problème 3. Trouver le nombre de couples ordonnés (a, b) d'entiers strictement positifs avec $a, b \leq 20$ tels que $ab(a + b)$ ne soit pas divisible par 3.

Problème 4. Soit $P(x)$ un polynôme de degré 4 de coefficient dominant 1 tel que $P(1) = 1$, $P(2) = 3$, $P(3) = 5$ et $P(4) = 7$. Calculer $P(5)$.

Problème 5. Dans le triangle ABC , on a $AB = 13$, $BC = 14$ et $CA = 15$. Soit I le centre du cercle inscrit. La droite passant par I parallèlement à BC coupe AB et AC en D et E respectivement. Trouver le périmètre du triangle ADE .

Problème 6. Combien d'entiers de 1 à 999 ont une somme de chiffres égale à 12 ?

Problème 7. Trouver la somme de tous les entiers strictement positifs x tels qu'il existe un entier strictement positif y vérifiant $x \leq y$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$.

Problème 8. Dans le triangle ABC , les points D et E sont situés sur les côtés BC et CA respectivement, tels que $BD : DC = 2 : 3$ et $CE : EA = 3 : 4$. Soit P le point d'intersection de AD et BE . Si le rapport de l'aire du triangle ABP à l'aire du triangle ABC s'exprime sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, trouver $m + n$.

Problème 9. Soit S l'ensemble de toutes les parties de $\{1, 2, \dots, 10\}$. Pour chaque $A \in S$, on note $P(A)$ le produit des éléments de A , avec la convention que le produit de l'ensemble vide vaut 1. Trouver le reste de la division euclidienne de $\sum_{A \in S} P(A)$ par 1000.

Problème 10. Une fourmi se trouve au sommet $(0, 0, 0)$ d'un cube dont les sommets sont les points (x, y, z) avec $x, y, z \in \{0, 1\}$. À chaque pas, la fourmi se déplace vers un sommet adjacent en changeant exactement une coordonnée. Combien de chemins d'exactly 7 pas se terminent au sommet $(1, 1, 1)$?

Problème 11. Combien de triangles peut-on former à l'aide de 3 sommets distincts d'un polygone régulier à 21 côtés de sorte que le centre du polygone se trouve strictement à l'intérieur du triangle ?

Problème 12. Deux cercles ω_1 et ω_2 de rayons 5 et 12 respectivement sont tangents extérieurement au point T . Leurs tangentes communes externes se coupent en X . Soit M le point d'intersection de l'une des tangentes communes externes avec la tangente commune interne. Si $XM = \frac{a\sqrt{b}}{c}$, où a et c sont des entiers positifs premiers entre eux et b est sans facteur carré, trouver $a + b + c$.

Problème 13. Soit $a_1 = 2$, et pour tout entier $n \geq 1$, on définit $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1 + a_n^2}}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{100} \left\lfloor \frac{1}{a_k} \right\rfloor.$$

Problème 14. Un triangle acutangle ABC est inscrit dans un cercle de rayon 25, et son orthocentre H vérifie $AH = 14$. Trouver la plus grande aire possible du triangle ABC .

Problème 15. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

pour tout $x \neq 0, 1$. Trouver le reste de la division euclidienne de $\lfloor f(2026) \rfloor$ par 1000.

Bonne chance !