
Test de Sélection pour l'Équipe OIM 2026

Instructions. Cette épreuve est constituée de **3 problèmes**. Durée de l'épreuve : **4 heures**. Chaque problème est noté sur 7 points. Veuillez rédiger vos solutions clairement, en fournissant une justification mathématique complète. Les calculatrices, livres, notes ou appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Problème 1. Soit ABC un triangle. Soit X un point variable sur $[BA)$, la demi-droite d'origine B passant par A , tel que $BX < BC$. Soit Y l'unique point sur $[CA)$, la demi-droite d'origine C passant par A , vérifiant $BX + CY = BC$. Prouver que, lorsque X varie avec $X, Y \neq A$, le cercle circonscrit au triangle AXY passe par un point fixe autre que A .

Problème 2. Certaines cases d'une grille de 2026×2026 carrés unités sont initialement coloriées en rouge ou en bleu, tandis que les autres cases sont non coloriées. La grille évolue ensuite par étapes : à chaque étape, simultanément, toute case non coloriée partageant un côté avec au moins deux cases rouges devient rouge, et toute case non coloriée partageant un côté avec au moins deux cases bleues devient bleue. Si une case remplit les conditions pour les deux couleurs simultanément, l'une ou l'autre couleur peut être choisie. Une fois coloriée, une case ne change plus de couleur.

Supposons que, finalement, toutes les cases de la grille soient coloriées, et que dans la configuration finale, toutes les cases de la ligne du haut soient rouges et toutes les cases de la ligne du bas soient bleues. Déterminer la plus petite valeur possible du nombre total de cases initialement coloriées.

Problème 3. Soit $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ une fonction telle que pour tous les entiers strictement positifs a et b ,

$$f(\text{pgcd}(a, b)) \mid \text{pgcd}(f(a), f(b)),$$

et pour tout entier strictement positif n ,

$$f^{(2n+2)}(n) = n.$$

Trouver la plus petite valeur possible de $f(2025)$.

(Remarque : $f^{(k)}(x)$ désigne la fonction f appliquée k fois à x .)

Bonne chance !